＜問題＞

x≧0 のとき、

$2^x + 2^{-x} = 2cosx$ を解きなさい。

＜基礎を重視した標準的アプローチ＞

$2^x > 0, 2^{-x} > 0$であるから、

$$2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x 2^{-x}} = 2\sqrt{2^0} = 2 \ (\because \text{相加相乗平均})$$

$$\therefore 2^x + 2^{-x} \geq 2$$

$2^x + 2^{-x} = 2cosx$より、$2cosx \geq 2$

しかし、$-1 \leq cosx \leq 1$より、$-2 \leq 2cosx \leq 2$

$2cosx \geq 2$ と $-2 \leq 2cosx \leq 2$ を両方充足するのは、

$$2cosx = 2$$

の場合である。

$2^x + 2^{-x} = 2cosx = 2$ すなわち $2^x + 2^{-x} = 2$

→

$$2^x + \frac{1}{2^x} = 2$$

$2^x = t$ とおくと、

$$t + \frac{1}{t} = 2$$

分母を払い

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

$(t-1)^2 = 0$より、t=1

$$\therefore 2^x = 1$$
$$\therefore x = 0$$

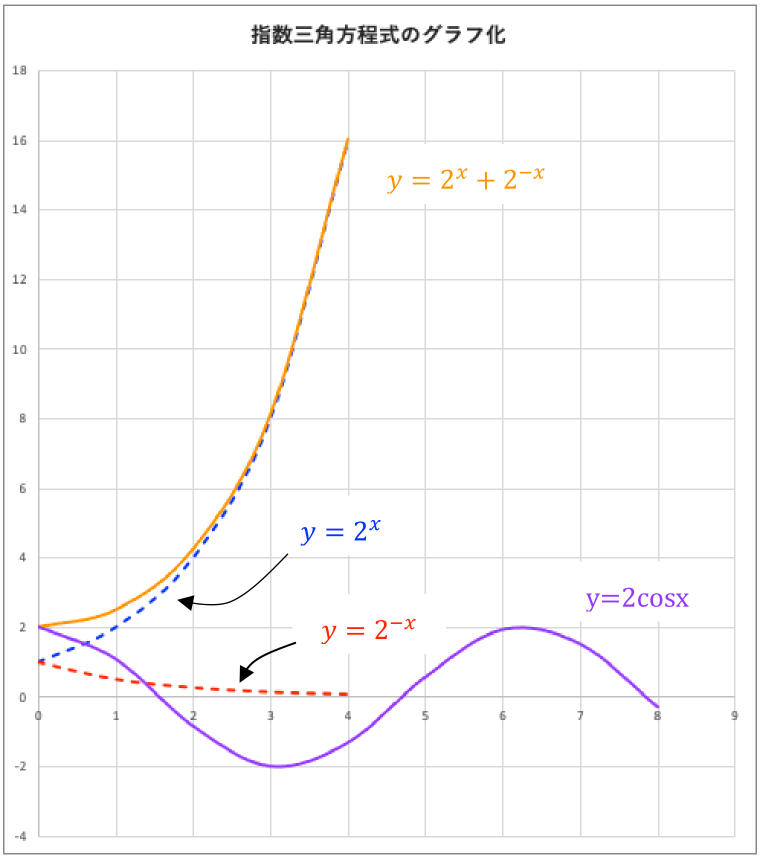
番組内で登場した東大理Ⅲ生は、

本問をどう考えたのだろうか？

＜グラフから考えるアプローチ＞

をしたのではないか？

→あくまでもハカセによる推測です



番組内で話題にでた東大理Ⅲ生が、問題を見て瞬時にｘ=0 ではないかと
答えたのは、番組で私が説明した話に加えて、上に示したようにグラフによる
解法で彼が考えていた可能性がある。

上図のように指数関数の合成関数は最小値 2 を起点に増加関数である。
一方、２ｃｏｓｘはｘ=０の時、数値 2 をとる。グラフから見て取れるように、
$y = 2^x + 2^{-x}$と$y = 2cosx$は、x≧0 の範囲では x=0 でしか、$2^x + 2^{-x} = 2cosx$
となる点は存在しないことが分かる。

なお、東大理Ⅲ生が本問をどのように考えたかの、推測の話なので、
指数関数の合成関数において、x を+∞に飛ばした時、
無限大になるという正確な証明はここでは省略している。

また、ここに示したような解法は思考法の一例として紹介したにすぎず、
基本に忠実な解き方とは言えない。マークの試験において対応可能な、
あくまでも緊急避難的な解法であるので、受験生の皆さんにおかれては、
まずは基礎を大切に標準的なアプローチを心がけるようにしてほしい。
皆さんの健闘を祈ります。